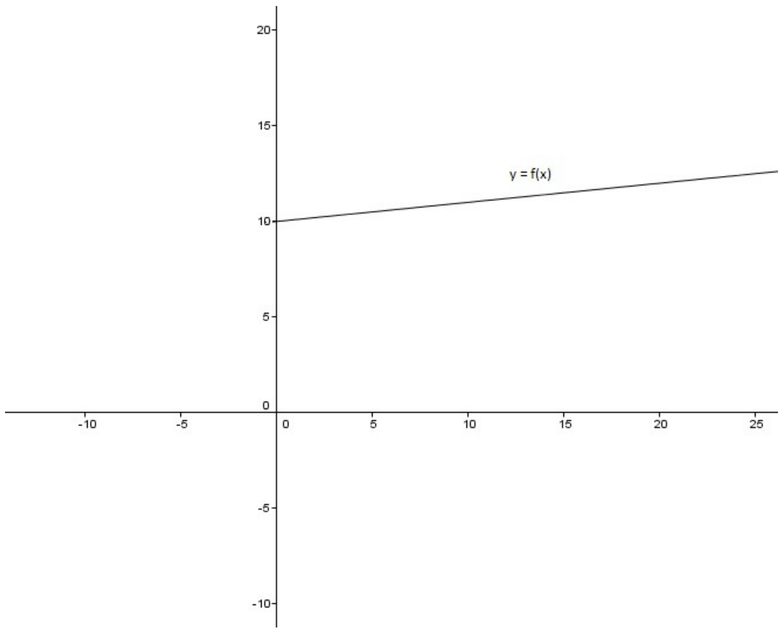
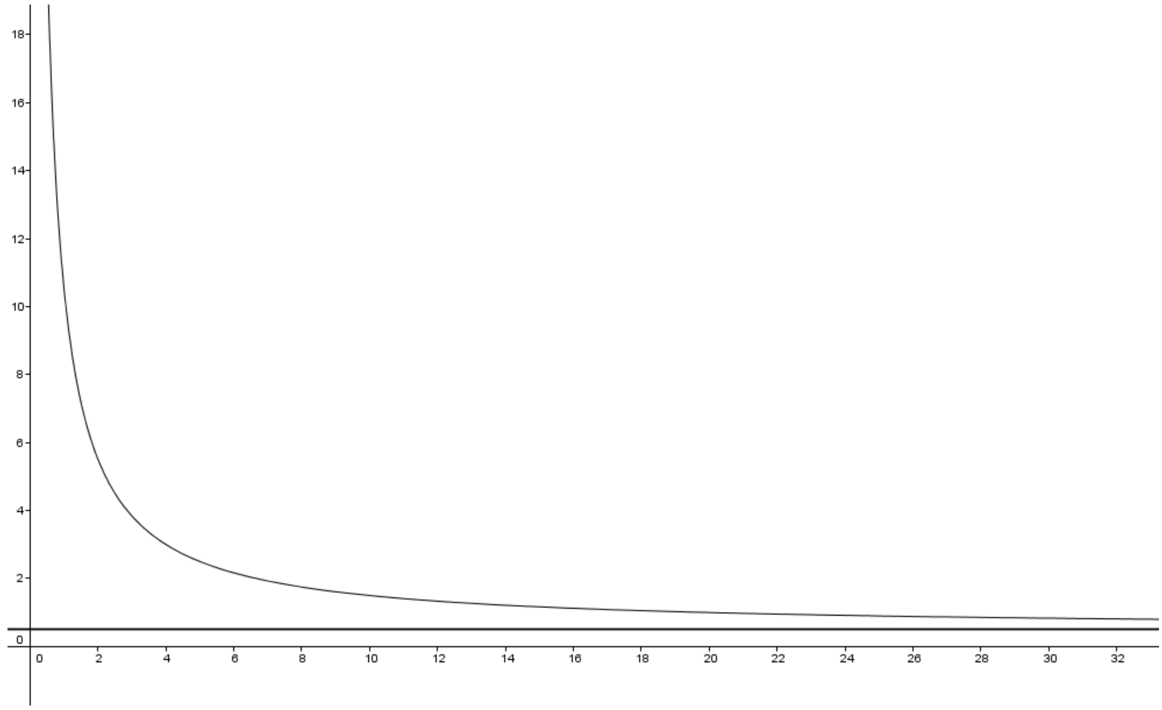
Problema 1

1. Descriviamo il problema in termini continui, supponendo che il tempo sia una variabile continua, anche se in realtà il problema è presentato con carattere discreto essendo il tempo misurato in minuti.
   Dai dati del testo segue che la spesa totale nel mese è rappresentata dalla funzione:
   $$f(x) = 10 + \frac{1}{10}x \quad (x \geq 0).$$
   Analogamente, si ricava che il costo medio è dato da $g(x) = f(x)/x$ ovvero da:
   $$g(x) = \frac{10}{x} + \frac{1}{10} \quad (x > 0).$$
   Il grafico della f è una retta di intercetta 10 e con un coefficiente angolare $1/10$, con un minimo in $(0, 10)$. La funzione è crescente: ovviamente, all'aumentare dei minuti di conversazione, aumenta la spesa totale.



   Il grafico della funzione g è un ramo di iperbole equilatera di asintoto verticale $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = \frac{1}{10}$. La funzione è decrescente e non ammette né massimi né minimi: all'aumentare del "minutaggio", il costo medio di una telefonata diminuisce avvicinandosi sempre più al valore $y = 1/10$ (con il canone fisso che diventa trascurabile).



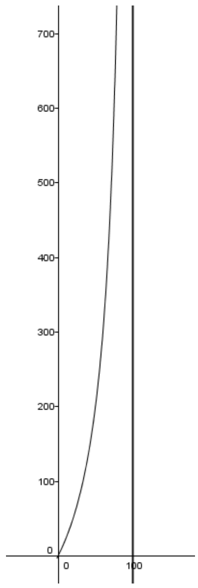
2. L'uguaglianza $g(x_1) = g(x_0)/2$ diventa:

$$\frac{10}{x_1} + \frac{1}{10} = \left(\frac{10}{x_0} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

da cui si ricava:

$$x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}$$

La dipendenza funzionale di x_1 da x_0 è espressa graficamente da un ramo di iperbole crescente che "nasce" nell'origine (è x_0 non negativo) e "termina" con l'asintoto verticale di equazione $x_0 = 100$. Stante la situazione concreta di cui ci stiamo occupando, l'iperbole non è definita per valori di x_0 maggiori di 100 (in quanto a tali valori corrisponderebbero un numero negativo di minuti x_1). L'asintoto verticale esprime dunque l'estremo superiore dei valori di x_0 per cui l'uguaglianza proposta ammette soluzioni e dunque si riesce a ottenere il dimezzamento dei costi medi.



3. La generica funzione polinomiale di secondo grado è $y = ax^2 + bx + c$. Imponendo il passaggio per i punti A, B e C, si ottiene in particolare la parabola di equazione:

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2.$$

   L'area della zona delimitata superiormente da questa curva nella mappa è data da:

$$\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right) dx = 21$$

   Quindi la zona coperta dal segnale misura $21 - \frac{1}{2} = \frac{41}{2}$, essendo ½ l'area della zona (triangolo) non coperta Z.

   Il rapporto è dunque uguale a $\frac{41/2}{21} = 0{,}9762$, superiore al 97%.

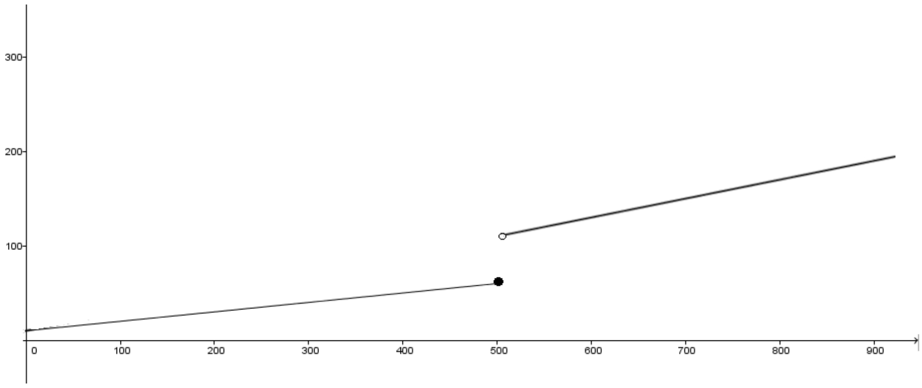
4. La modifica apportata dall'operatore al suo piano tariffario porta a una nuova funzione di spesa totale:

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{1}{10}x & 0 < x \leq 500 \\ 10 + \frac{2}{10}x & x > 500 \end{cases}$$

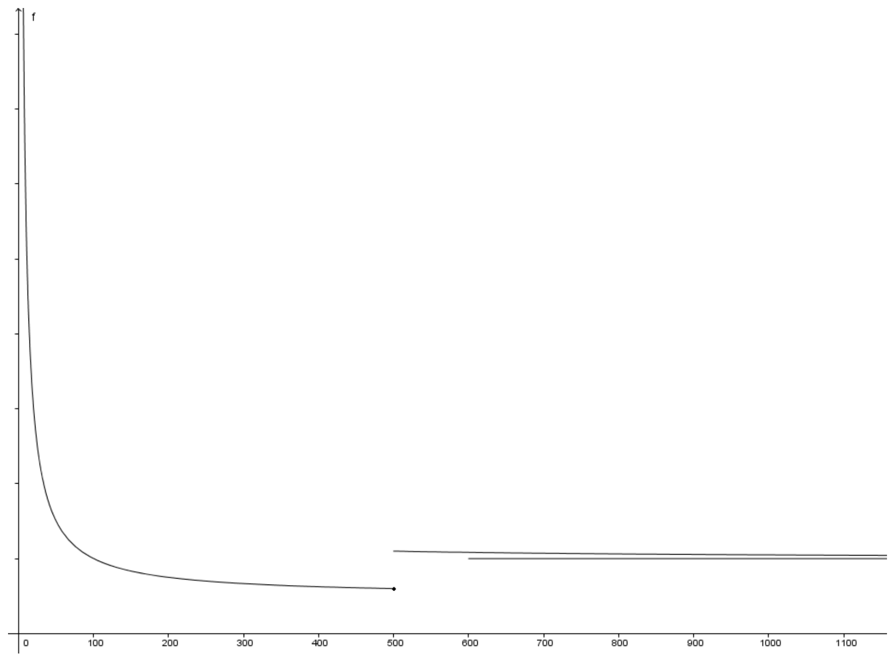
   Analogamente, la nuova funzione di costo medio al minuto è data da:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & 0 < x \leq 500 \\ \frac{10}{x} + \frac{2}{10} & x > 500 \end{cases}$$

Il grafico della funzione f è rappresentato da una "spezzata": una funzione crescente che presenta un punto di discontinuità (di salto) nel punto $x = 500$; il minimo assoluto si ha in $x = 0$.



La funzione g (il cui grafico è rappresentato sotto) non è né crescente né decrescente nel dominio (è decrescente separatamente negli intervalli (0, 500] e per $x > 500$). Il punto $x = 500$ è il punto di minimo assoluto (che, anche in questo caso, è punto di discontinuità di salto). La retta di equazione $x = 0$ costituisce un asintoto verticale; la retta di equazione $y = 2/10$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.



La derivata prima della funzione g è: $g'(x) = -10/x^2$ che non è definita per $x = 500$; in $x = 500$ la funzione g presenta un punto di minimo assoluto. Nella nuova situazione il costo medio continua a diminuire (all'aumentare di x) ma, superando i 500 minuti, parte da una situazione diversa e peggiore in quanto è intervenuto il sovrapprezzo di 10 centesimi al minuto.